Rachunek różniczkowy funkcji wielu zmiennych - gradient i pochodna kierunkowa

Z rachunku różniczkowego funkcji jednej zmiennej wiemy, że pochodna funkcji w pewnym punkcie oznacza prędkość zmiany wartości funkcji w tym punkcie. Podobnie jest dla funkcji dwóch (jak również większej liczby) zmiennych. Pochodne cząstkowe funkcji $z = f(x, y)$ w punkcie $P_0(x_0, y_0)$ oznaczają mianowicie prędkości zmiany wartości tej funkcji w punkcie P_0 w kierunkach osi układu współrzędnych: osi *Ox* dla pochodnej $f_x'(x_0, y_0)$ oraz osi *Oy* dla pochodnej $f_y'(x_0, y_0)$.

Jednakże w wielu zagadnieniach istotne jest określenie prędkości zmiany wartości funkcji *f* w kierunkach różnych od kierunków osi układu współrzędnych. W takich przypadkach posługujemy się tzw. pochodną kierunkową. Kierunek obliczania takiej pochodnej może być określony poprzez równania parametryczne półprostej o początku w punkcie P_0, ewentualnie poprzez wektor. W poniższych określeniach pochodnej kierunkowej słowo definicja ma charakter umowny – w ścisłych definicjach tego pojęcia posługujemy się granicą pewnego ilorazu różnicowego.

Niech p będzie półprostą o początku w punkcie $P_0(x_0, y_0)$, tworzącą z osiami *Ox* i *Oy* odpowiednio kąty α i β. Zapiszmy równania parametryczne tej półprostej:

$$p: \begin{cases} x = x_0 + t\cos\alpha \\ y = y_0 + t\cos\beta \end{cases}, \quad t \geq 0 .$$

Definicja. *Pochodną kierunkową* funkcji $z = f(x,y)$ w punkcie $P_0(x_0, y_0)$ w kierunku półprostej p nazywamy wyrażenie postaci:

(1) $$\frac{\partial f}{\partial p} = f_x'(x_0, y_0)\cos\alpha + f_y'(x_0, y_0)\cos\beta .$$

Dla funkcji trzech zmiennych $u = f(x, y, z)$ oraz półprostej p o równaniach:

$$p: \begin{cases} x = x_0 + t\cos\alpha \\ y = y_0 + t\cos\beta , \quad t \geq 0 . \\ z = z_0 + t\cos\gamma \end{cases}$$

pochodna kierunkowa przyjmie postać:

(2) $$\frac{\partial f}{\partial p} = f_x'(x_0, y_0, z_0)\cos\alpha + f_y'(x_0, y_0, z_0)\cos\beta + f_z'(x_0, y_0, z_0)\cos\gamma .$$

W przypadku, gdy kierunek określony jest poprzez wektor $\vec{w} = [w_x, w_y]$ (lub $\vec{w} = [w_x, w_y, w_z]$) pochodną kierunkową można wyznaczyć ze wzoru:

(3) $$\frac{\partial f}{\partial \vec{w}} = f_x'(x_0, y_0)\frac{w_x}{|\vec{w}|} + f_y'(x_0, y_0)\frac{w_y}{|\vec{w}|}$$

lub

(4) $$\frac{\partial f}{\partial \vec{w}} = f_x'(x_0, y_0, z_0)\frac{w_x}{|\vec{w}|} + f_y'(x_0, y_0, z_0)\frac{w_y}{|\vec{w}|} + f_z'(x_0, y_0, z_0)\frac{w_z}{|\vec{w}|} ,$$

gdzie $|\vec{w}|$ oznacza długość wektora $\vec{w}$, którą obliczamy ze wzoru $|\vec{w}|=\sqrt{w_x^2+w_y^2}$ dla (3) lub $|\vec{w}|=\sqrt{w_x^2+w_y^2+w_z^2}$ dla (4).

Definicja. *Gradientem* funkcji $z=f(x,y)$ w punkcie $P_0(x_0,y_0)$ nazywamy wektor

(5) $$\operatorname{grad} f(x_0,y_0)=\left[f'_x(x_0,y_0)\ ,\ f'_y(x_0,y_0)\right].$$

Analogicznie, dla funkcji $u=f(x,y,z)$ trzech zmiennych mamy:

(6) $$\operatorname{grad} f(x_0,y_0,z_0)=\left[f'_x(x_0,y_0,z_0)\ ,\ f'_y(x_0,y_0,z_0),\ f'_z(x_0,y_0,z_0)\right].$$

Uwaga. Gradient funkcji w punkcie wskazuje kierunek najszybszego wzrostu funkcji w tym punkcie. Dlatego też jest on szeroko wykorzystywany w zagadnieniach praktycznych. Znalazł on między innymi zastosowanie w gradientowych metodach optymalizacji, w których wskazuje on kierunek poszukiwań lokalnego maksimum (lub minimum) funkcji.

Przykład. Obliczyć pochodną kierunkową funkcji $z=f(x,y)=2x^3+y^2$ w punkcie $P_0(1,1)$ w kierunku osi p wyznaczonej przez kąty: $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$, $\beta=\dfrac{\pi}{3}$.

Rozwiązanie. Obliczamy pochodne cząstkowe pierwszego rzędu oraz wartości tych pochodnych w punkcie $P_0(1,1)$:

$f'_x(x,y)=6x^2$, to $f'_x(x_0,y_0)=f'_x(1,1)=6$, $f'_y(x,y)=2y$, to $f'_y(x_0,y_0)=f'_y(1,1)=2$.

Stąd

$$\frac{\partial f}{\partial p}=f'_x(x_0,y_0)\cos\alpha\ +\ f'_y(x_0,y_0)\cos\beta=f'_x(1,1)\cos\frac{\pi}{6}\ +\ f'_y(1,1)\cos\frac{\pi}{3}=6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+2\cdot\frac{1}{2}=3\sqrt{3}+1$$

Przykład. Pole temperatur w każdym punkcie ciała

$$V=\{(x,y,z):0<x<\pi\ ,\ 0<y<\pi\ ,\ 0<z<\pi\}$$

określone jest funkcją

$$T(x,y,z)=4\sin(x-z)+\cos(2y+z).$$

Znaleźć kierunek najszybszego wzrostu temperatury w punkcie $\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{6}\right)$.

Rozwiązanie. Kierunek najszybszego wzrostu temperatury wskaże nam gradient funkcji T w punkcie $T_0\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{6}\right)$. Posłużymy się zatem następującym wzorem:

$$\operatorname{grad}T\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{6}\right)=\left[T'_x\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{6}\right),T'_y\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{6}\right),T'_z\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{6}\right)\right].$$

Obliczamy pochodne cząstkowe funkcji T oraz wartości tych pochodnych w punkcie T_0:

$T'_x(x,y,z)=4\cos(x-z)$, stąd

$$T'_x\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{6}\right)=4\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=4\cos\left(\frac{3\pi}{6}-\frac{\pi}{6}\right)=4\cos\frac{\pi}{3}=4\cdot\frac{1}{2}=2.$$

$T'_y(x,y,z)=-\sin(2y+z)\cdot 2=-2\sin(2y+z)$, stąd

$$T'_y\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{6}\right)=-2\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=-2\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=$$

$$=\left\{\begin{array}{c}\text{wzór redukcyjny:}\\ \sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha\end{array}\right\}=2\sin\frac{\pi}{6}=2\cdot\frac{1}{2}=1\,.$$

$$T_z'(x,y,z)=4\cos(x-z)\cdot(-1)+[-\sin(2y+z)]=-4\cos(x-z)-\sin(2y+z)\,,$$

stąd

$$T_z'\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{6}\right)=-4\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)-\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=$$

$$=-4\cos\left(\frac{3\pi}{6}-\frac{\pi}{6}\right)-\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-4\cos\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{6}=$$

$$=-4\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=-2+\frac{1}{2}=-\frac{3}{2}\,.$$

Zatem

$$\operatorname{grad}T\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{6}\right)=\left[2,\,1,\,-\frac{3}{2}\right]\,.$$

Przykład. Obliczyć gradient funkcji $u=\ln(x^2-yz)$ w punkcie $P_0(-2,1,3)$ oraz pochodną kierunkową tej funkcji w kierunku gradientu.

Rozwiązanie. Wyznaczamy wartości pochodnych cząstkowych w punkcie P_0:

$$u_x'=\frac{1}{x^2-yz}\cdot 2x=\frac{2x}{x^2-yz}\,,\qquad \text{to } u_x'(x_0,y_0,z_0)=u_x'(-2,1,3)=\frac{-4}{4-3}=-4\,.$$

$$u_y'=\frac{1}{x^2-yz}\cdot(-z)=-\frac{z}{x^2-yz}\,,\quad \text{to } u_y'(x_0,y_0,z_0)=u_y'(-2,1,3)=-\frac{3}{4-3}=-3\,.$$

$$u_z'=\frac{1}{x^2-yz}\cdot(-y)=-\frac{y}{x^2-yz}\,,\ \text{to } u_z'(x_0,y_0,z_0)=u_z'(-2,1,3)=-\frac{1}{4-3}=-1\,.$$

Zatem

$$\operatorname{grad}u(x_o,y_o,z_o)=[-4,-3,-1].$$

Aby obliczyć pochodną kierunkową wyznaczamy najpierw długość wektora $\vec{w}$:

$$\vec{w}=[-4,-3,-1]\ \Rightarrow\ |\vec{w}|=\sqrt{(-4)^2+(-3)^2+(-1)^2}=\sqrt{26}\,.$$

Stąd

$$\frac{\partial u}{\partial\vec{w}}=f_x'(x_0,y_0,z_0)\,\frac{w_x}{|\vec{w}|}+f_y'(x_0,y_0,z_0)\,\frac{w_y}{|\vec{w}|}+f_z'(x_0,y_0,z_0)\,\frac{w_z}{|\vec{w}|}=$$

$$=-4\cdot\frac{-4}{\sqrt{26}}+(-3)\cdot\frac{-3}{\sqrt{26}}+(-1)\cdot\frac{-1}{\sqrt{26}}=\frac{26}{\sqrt{26}}=\sqrt{26}\,.$$

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Obliczyć gradient funkcji:

38. $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ w punkcie $P_0(3,4)$,

39. $f(x,y)=\ln\frac{y}{x}$ w punkcie $P_0(1,1)$,

40. $f(x,y)=x\sin y$ w punkcie $P_0(2,0)$,

41. $f(x,y,z)=xy^2z^3$ w punkcie $P_0(1,-1,2)$.

Znaleźć pochodną kierunkową funkcji:

42. $f(x,y)=x^2+yx$ w punkcie $P_0(3\ ,\ 5)$, w kierunku wektora $\vec{w}=[4,-3]$,

43. $f(x,y)=\operatorname{arctg}xy$ w punkcie $P_0(1\ ,1)$, w kierunku wektora $\vec{w}=[\sqrt{5},2]$,

44. $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ w punkcie $P_0(2,-2,1)$, w kierunku gradientu w tym punkcie.

Opracowanie:
dr Igor Kierkosz
dr hab. Volodymyr Sushch